Itinerarius Reflectionis ISSN 1807-9342 UFJ UNIVERSIDADE FEDERAL DE JATAÍ

Modelagem Matemática e o uso do Princípio da Indução Finita no conteúdo PA e PG do 2º ano do ensino médio

Fernando Alcy das Chagas Pereira de Souza[1]
Secretaria de Educação do Distrito Federal
Brasília-DF

Ana Maria Libório Oliveira[2]
Instituto Federal de Brasília
Brasília-DF

Resumo: Este artigo apresenta os resultados da investigação realizada no Trabalho de Conclusão de Curso da Licenciatura em Matemática. A investigação teve o objetivo geral em analisar as demonstrações do princípio da indução finita, para verificar se abordagem é eficaz no que tange a compreensão e resolução dos exercícios de PA e PG por parte dos alunos do ensino médio. Dessa forma, utilizou-se da modelagem matemática como metodologia de ensino, e a investigação de Burak como metodologia de pesquisa. Os dados da pesquisa apresentaram que é possível aplicar as demonstrações matemáticas com os alunos do ensino médio e a modelagem matemática é eficiente nos processos das demonstrações. As resoluções enviadas pelos alunos trazem as demonstrações da soma dos termos de uma progressão aritmética, como também, a demonstração da soma dos termos de uma progressão geométrica.

Palavras-Chave: Princípio de Indução Finita. Modelagem Matemática. Investigação de Burak.

Modelación Matemática y el uso del Principio de Inducción Finita en los contenidos de PA y PG de 2° año de secundaria

Resumen: Este artículo presenta los resultados de la investigación realizada en el Trabajo de Conclusión de Curso de la Licenciatura en Matemáticas. La investigación tuvo como objetivo general analizar las demostraciones del principio de inducción finita, para verificar si el enfoque es efectivo en cuanto a la comprensión y resolución de ejercicios PA y PG por parte de los alumnos de secundaria. De esta manera, se utilizó la modelización matemática como metodología de enseñanza y la investigación de Burak como metodología de investigación. Los datos de la investigación llevan a creer que es posible trabajar demostraciones con estudiantes de secundaria y que uno de los enfoques mediante las demostraciones matemático. Las resoluciones enviadas por alumnos traen las demostraciones de la suma de los términos de una progresión aritmética, así como la demostración de la suma de términos de una progresión geométrica.

Palabras Clave: Principio de Inducción Finita. Modelización Matemática. Investigación de Burak.

[1] E-mail: fernandoalcy@gmail.com. Secretaria de Educação do Distrito Federal.

[2] E-mail: analiborio@gmail.com. Instituto Federal de Educação, ciências e Tecnologia de Brasília – Campus Estrutural.

1. INTRODUÇÃO

O Princípio de Indução Finita (PIF) é uma valiosa ferramenta de demonstração formal, com sua finalidade, segundo Lima (1998), na prova de proposições e teoremas que se referem aos inteiros. Como é um método simples (pois em alguns casos consiste apenas na manipulação dos termos algébricos), é viável seu uso no ensino médio, como uma forma de justificar as fórmulas e os resultados tratados ao longo da educação básica. Como, por exemplo, o número de diagonais de um polígono ou a soma dos termos de uma progressão aritmética.

Além disso, o uso do PIF no ensino médio está amparado pela Base Nacional Comum Curricular — BNCC (BRASIL, 2020) uma vez que ele se liga às competências de mobilização de conhecimentos que diz respeito às generalizações, como também,

à habilidade de argumentação, consistente para justificar o raciocínio utilizado necessários para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Diante disso, podemos fazer inúmeras indagações, algumas delas são: como o uso de demonstrações pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento crítico dos estudantes? Ou como o PIF pode auxiliar para a compreensão e aprendizagem dos conteúdos de Progressão Aritmética (PA) e Progressão Geométrica (PG) por parte dos alunos do 2º ano do ensino médio?

A proposta deste artigo teve como motivação a busca dessas respostas, para isto, recorreu-se à modelagem matemática como metodologia de ensino em decorrência da metodologia de investigação de Burak (2004). Dessa forma, na aplicação da pesquisa foi necessário conceituar e explicar o PIF e citar os conteúdos de PA e PG e finalizar com a verificação da aprendizagem.

Portanto, como objetivo, este artigo analisou as demonstrações do princípio da indução finita, para verificar se abordagem é eficaz no que tange à compreensão e resolução dos exercícios de PA e PG por parte dos alunos do ensino médio.

Em face do exposto, este artigo buscou, por meio da modelagem matemática, instruir a utilização do PIF, aos alunos das turmas do segundo ano do Ensino Médio, na modalidade remota, de forma síncrona e assíncrona, para que este possa contribuir na aprendizagem e compreensão nos conteúdos de PA e PG.

2. OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é analisar as demonstrações do princípio da indução finita, para verificar se abordagem é eficaz no que tange a compreensão e resolução dos exercícios de PA e PG por parte dos alunos do ensino médio.

Para efetivar o objetivo geral foram efetivados os seguintes objetivos específicos:

- Verificar as competências aritméticas e o desenvolvimento dos termos algébricos;
- Apresentar, por meio de modelos matemáticos, o PIF nos conteúdos de PA e PG;

- Aplicar atividades para que os alunos desenvolvam, por meio da Modelagem Matemática o PIF;
- Averiguar os modelos matemáticos do PIF desenvolvidos pelos discentes.

3. HISTÓRIA: O SURGIMENTO DO PRINCÍPIO INDUTIVO

A matemática faz-se presente desde os primórdios da humanidade, segundo Boyer (1999 *apud* Barasuol, 2006) o homem pré-histórico possuía noção de contagem, como também a habilidade de perceber padrões geométricos. Com o surgimento das cidades e o aparecimento da escrita, o mundo foi ficando mais complexo, e os problemas também.

Dessa forma, a matemática cada vez mais se fazia necessária entre os povos mesopotâmicos e egípcios, estes no que lhe concerne tiveram grandes contribuições no desenvolvimento do conhecimento matemático, inclusive atrelados a outras áreas como a astronomia.

Sobretudo, com os gregos a matemática ganha um caráter axiomático-dedutivo, onde os teoremas e proposições da geometria plana são demonstrados por Euclides em sua obra *Os Elementos*. Segundo Katz (2004 *apud* Duarte, 2015) nessa mesma obra no volume XI a proposição 35 é enunciada da seguinte forma: "Se tantos números quantos se queira estiverem em proporção continuada, e se subtrai ao segundo e ao último o primeiro, então o excesso do segundo está para o primeiro como o excesso do último está para a soma de todos antes dele". No qual se percebe uso implícito da indução finita por parte de Euclides.

Após o período clássico e posteriormente com o declínio do Império Romano, a Europa entra na Idade Média, isto faz com que o oriente se torne uma região importante no desenvolvimento da matemática, como afirma Silva e Mendes:

> […] diante do quadro sócio-político-econômico-religioso vivido pela Europa Ocidental durante a Idade Média, bem como as dificuldades dos matemáticos bizantinos em manter acesa a chama do conhecimento herdado dos gregos, coube a Índia e a Arábia contribuírem com a continuidade da atividade matemática alcançando o brilhantismo de introduzirem importantes métodos e conhecimentos matemáticos de largo alcance que até hoje se constituem em componentes imprescindíveis para o ensino da matemática atual. Especialmente nos países sob influência mulçumana a matemática se desenvolveu bem mais até os séculos XIII — XIV do que se comparada aos países sob domínio cristão […] (SILVA; MENDES, 2013, p. 43 – 44).

Entretanto, com o advento do renascimento, a ciência começa a dar novos passos na Europa. Dessa forma, a matemática, sendo uma ciência de base, também começa a sofrer as consequências da renascença. E através do matemático Francesco Maurolicus (1494 – 1575) que ocorreu o uso do método indutivo de forma explícita para provar que $1 + 3 + 5 + . . . + (2n - 1) = n2$.

Segundo Santos (2013), o método torna-se popular quando Blaise Pascal (1623 – 1662) recorre ao método de indução para provar uma das propriedades do triângulo que leva seu nome. Mas é com Peano (1858 – 1932), que se verificou toda a teoria dos números naturais.

Sendo assim, “Deve-se a Giussepe Peano (1858 – 1932) a constatação de que se pode elaborar toda a teoria dos números naturais a partir de quatro fatos básicos, conhecidos atualmente como os axiomas de Peano” (LIMA, 1998, p. 26).

Uma forma de verificar uma parte dessa teoria é utilizando os axiomas de Peano e definindo por funções iteradas as operações de adição e de multiplicação de números naturais, com isso é possível provar as propriedades: associativa, comutativa, lei do corte e tricotomia para adição. Já para a multiplicação é possível provar as três primeiras apresentadas anteriormente, a distributividade e a monotonicidade.

Uma vez que se conhece mais sobre o conjunto dos números naturais, por meio de suas propriedades (que, é o conjunto infinito mais simples de se entender, pois ele está relacionado com o método de contagem) pode-se ampliar os conceitos para outros conjuntos a fim de extrair mais informações sobre eles.

Como a quantidade de termos de uma PA e de uma PG estão no conjunto dos números naturais, logo é possível demonstrar através do PIF as fórmulas dos termos gerais para essas progressões quanto também as fórmulas de suas somas.

4. O CAMINHAR DA INVESTIGAÇÃO

A metodologia de ensino utilizada na investigação baseou-se na modelagem matemática, a escolha não foi aleatória, uma vez que Segundo Werneck (1987 *apud* FORTES; JUNIOR, OLIVEIRA, 2013), temos ensinado de mais os alunos, e eles no que lhe concerne aprendem cada vez menos, pois os assuntos estão cada vez mais distantes de suas realidades. Esta fala reforça a importância de uma metodologia de ensino ativa, mais próxima do estudante e eficaz. Ademais, “Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas do conhecimento”. (BARBOSA, 2002 *apud* FORTES, JUNIOR, OLIVEIRA, 2013, p. 6).

Fortes, Junior, Oliveira (2013) elucidam objetivamente como fazer modelagem matemática.

> A ideia de utilização da Modelagem da Matemática é relativamente simples. Parte-se de um tema vivido na sociedade, aproveita-se o conhecimento empírico dos alunos sobre determinado assunto e mostram-se aplicações práticas de algum conteúdo da matemática, com objetivo de facilitar o entendimento dos alunos sobre tal assunto. (FORTES, JUNIOR, OLIVEIRA, 2013, p. 2)

Posto isto, a pesquisa realizada foi de caráter qualitativo (BOGDAN; BIKLEN, 2003), que se distingue no uso de um plano geral de estudo.

Diante disso, uma forma de se fazer uma investigação, tendo como base a Modelagem Matemática, e por meio da metodologia de pesquisa de Burak (2004) conduzida em 5 etapas: escolha do tema, pesquisa exploratória, levantamento dos problemas, resolução dos problemas e desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e crítica das soluções, conforme apresentada as respectivas sequências.

- Escolha do Tema: a escolha do tema parte da iniciativa da turma mediada pelo professor, os temas podem estar ligados a esportes, jogos, brincadeiras, a problemas sociais e até mesmo ambientais. Pode haver a escolha de mais de um tema, entretanto o professor deverá optar por um tema central e depois tentar vincular com o segundo tema. É comum a interdisciplinaridade se fazer presente nessa prática.
- Pesquisa Exploratória: nessa etapa os alunos devem realizar a pesquisa sobre o tema, por um olhar crítico, efetuando suas próprias conjecturas.
- Levantamento do(s) Problema(s): a pesquisa efetuada em etapa anterior proporciona amparo para o levantamento do(s) problema(s) por parte dos alunos. Nesta etapa o professor tem papel importantíssimo, pois será o mediador e contribuinte no levantamento dos problemas, sempre instigando e fazendo perguntas aos discentes. Surgindo, então, a resolução dos problemas.
- Resolução do(s) Problema(s): é o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema. Conforme o autor da metodologia.

> A resolução do(s) problema(s) confere à Modelagem Matemática a etapa em que se recorre a todo o ferramental matemático disponível. Na resolução de um problema ou de uma situação-problema, os conteúdos matemáticos ganham importância e significado. As operações, as propriedades, e os diversos campos da matemática que se fazem presentes nessa etapa, sem dúvida atribuem significados aos conteúdos matemáticos. (BURAK, 2010, p. 22)

Também conforme o autor;

> A resolução de problemas ganha contornos e significados diferentes, a forma ou maneira usual de se resolver problemas: 1) os problemas são elaborados a partir dos dados coletados em campo; 2) prioriza a ação do estudante na elaboração; 3) parte sempre de uma situação Dionísio Burak 23 contextualizada; 4) favorece a criatividade; 5) confere maior significado ao conteúdo matemático usado na resolução; 6) favorece a tomada de decisão. (BURAK, 2010, p. 22)

Análise Crítica da(s) Solução(*ões*): essa é a finalização da metodologia, uma parte muito importante, pois é a partir dela que se faz a análise das soluções matemáticas e não matemáticas feitas por parte dos alunos.

5. DESENVOLVIMENTO DA APLICAÇÃO DA PESQUISA

A pesquisa foi aplicada com os discentes das turmas A e B do segundo ano, totalizando 7 alunos do Ensino Médio Integrado do Curso Técnico em Manutenção Automotiva do Instituto Federal de Brasília — Campus Estrutural, pois era a escola que o investigador estava trabalhando como monitor nesse momento de pandemia pelo *Covid-19*. A aula síncrona foi gravada e disponibilizada na plataforma do ambiente de aprendizagem virtual – Núcleo de Educação à Distância - NEaD (*Link* da plataforma: https://nead.ifb.edu.br/). A atividade da investigação analisada foi disponibilizada pelo professor na mesma plataforma.

Uma semana antes da ministração da aula síncrona, o professor regente da turma foi instruído a passar como tarefa de pesquisa o jogo denominado de Torre de *Hanói*. Isto foi pedido com antecedência para os alunos, devido ao pouco tempo (1 aula) que foi cedido para a realização desta investigação, dessa maneira a primeira etapa que é a escolha do tema foi concluída.

Ao iniciar a aula síncrona com as turmas A e posteriormente com a turma B, foi feita uma breve explicação de como se joga a Torre de *Hanói*, e logo em seguida, foi disponibilizado o *link* no *chat* da aula para que eles pudessem jogar durante 7 minutos de maneira *on-line*. Dessa maneira, com o término do tempo de jogo por parte dos discentes e da pesquisa realizada em momento anterior, finaliza a segunda etapa da pesquisa.

Após o término do jogo, iniciamos a terceira etapa da investigação, onde os alunos foram convidados a conjecturar hipóteses a respeito do jogo, como: Qual é o número mínimo de movimentos se tivermos 10 discos? Qual é o número mínimo de movimentos se tivermos *n* discos? Existe alguma relação com o número de discos e o número mínimo de movimentos? Qual seria essa relação? Será que essa relação vale para todos os números naturais?

Os alunos perceberam que ao utilizar o sucessor do dobro da quantidade mínima de movimentos do termo anterior poderia se chegar ao termo seguinte. Eles também conseguiram chegar na fórmula, $T(n) = 2^n - 1$ onde n é a quantidade de discos e $T(n)$ é a quantidade mínima de movimentos.

Na quarta etapa foi apresentado os *Axiomas de Peano* conforme elucida Lima (1998) em linguagem corrente.

1. Todo número natural possui um único sucessor, que também é um número natural.
2. Números naturais diferentes possuem sucessores diferentes.
3. Existe um único número natural que não é sucessor de nenhum outro. Este número é chamado de número um e é representado pelo símbolo 1.
4. Se um conjunto de números naturais contém o número 1, e, além disso, contém o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto coincide com N. (LIMA, 1998, p. 27).

Após a apresentação e explicação dos *Axiomas de Peano*. Voltamos ao problema da Torre de *Hanói* e chegamos por recorrência na expressão.

$$T(n) = T(n-1) + 1\,T(n-1) = 2T(n-1) + 1 \qquad \forall\, n \in N.$$

Vale a pena ressaltar que essa expressão já tinha sido observada pelos alunos. Através da expressão acima e com o axioma 4 (axioma de indução) podemos demonstrar se a fórmula $T(n) = 2^n - 1$, é válida para todos os números naturais.

Primeiramente verificaremos se a fórmula é válida para o primeiro termo, ou seja, para $n = 1$

$$2^1 - 1 = 1$$

Logo, a fórmula é válida para $n = 1$

Suponha que a fórmula $T(n) = 2^n - 1$ seja válida para algum $n \in N.$ Basta verificarmos se ela é válida para seu sucessor, ou seja, para $n + 1.$

$T(n+1) = 2T(n) + 1$
$T(n+1) = 2\,(2^n - 1) + 1$
$T(n+1) = 2^{n+1} - 1$

Portanto, a fórmula $T(n) = 2^n - 1$ é válida para todo número natural.

Definição de Progressão Aritmética: Uma Progressão Aritmética é uma sequência de números (a_n) tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} somado a um número fixo $r$chamado de razão (HEFEZ, 2009, p. 24).

Portanto, é dado o primeiro termo a_1 e define-se recorrentemente

$$a_n = a_{n-1} + r; \quad \text{se } n \geq 2$$

Após a definição acima foi demonstrado se a fórmula dos termos de uma PA $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ (sendo $n \in N$ e ra razão da PA) era válida para todos os números naturais. A demonstração da fórmula pode ser feita da seguinte maneira:

É direto ver que a fórmula é válida para $n = 1$. Suponha que a fórmula:

$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ seja válida para algum $n \in N$Agora deve-se verificar se a fórmula é válida para $n + 1$

$$a_n + r = a_1 + (n-1) \cdot r + r$$
$$a_{n+1} = a_1 + [(n+1) - 1] \cdot r$$

Portanto, pelo Princípio da Indução Finita, a fórmula $a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$ é válida para todos os números naturais.

Por fim, o último exercício era demonstrar a célebre fórmula da soma dos *n* primeiros números naturais:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \mathrm{n} = \frac{n\,(\mathrm{n} + 1)}{2}$$

É fácil ver que a fórmula é válida para $n = 1$. Suponha que a fórmula:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + \mathrm{n} = \frac{n\,(\mathrm{n} + 1)}{2}$$

seja válida para algum $n \in N$. Segue abaixo as manipulações algébricas que comprovam que ela é válida para o sucessor de.n

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + n + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n + 1$$
$$= \frac{n \cdot (n+1) + 2 \cdot (n+1)}{2}$$
$$= \frac{n\,(\mathrm{n} + 1)}{2}$$

Portanto, a fórmula é válida para todos os números naturais.

Após todas essas demonstrações foi deixado dois exercícios para a verificação da aprendizagem.

Exercício 1 **-** Prove que a soma dos termos de uma progressão aritmética é dada por

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

e que é válida para todo $n \in N$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

Resolução esperada**:**

Temos que,

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1$$

Somando as duas igualdades obtém-se

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

Daí, temos

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \ldots + (a_n + a_1)$$

Segue que

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2}$$

Agora, devemos provar se a fórmula da soma dos termos de uma PA é válida para todos os números naturais.

Para se tem $n = 1$, que a fórmula é verdadeira, uma vez que:

$$a_1 = \frac{(a_1 + a_1) \cdot 1}{2}$$
$$a_1 = a_1$$

Suponha que a fórmula, seja válida para algum $n \in N$. Então, basta aplicarmos a fórmula para $n+1$ e verificar a validade.

$$
\begin{aligned}
a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + a_{n+1} &= \frac{(a_1 + a_n)\, n}{2} + a_{n+1} \\
&= \frac{a_1 \cdot n + a_n \cdot n + 2a_1 + 2nr}{2} \\
&= \frac{a_1\, n + a_1 + (a_n + r)\, n + a_1 + rn}{2} \\
&= \frac{a_1 (n + 1) + \mathrm{a}_{n+1} \cdot n + a_{n+1}}{2} \\
&= \frac{(a_1 + a_{n+1}) \cdot (n + 1)}{2}
\end{aligned}
$$

Pelo PIF a fórmula é válida para todos os naturais.

Exercício 2 - Uma Progressão Geométrica (PG) é uma sequência de números a_n tal que, a partir do segundo termo, cada termo a_n é igual ao anterior a_{n-1} multiplicado por um número fixo q chamado de razão. Portanto, é dado o primeiro termo a_1 e define-se recorrentemente, $a_n = a_{n-1} \cdot q$ se $n \geq 2$.

Prove que a fórmula, $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ é válido para todo $n \in N$ (Esse exercício se encontrava nos *slides* da ministração da aula, disponibilizado para os estudantes na plataforma do ambiente virtual de aprendizagem — Núcleo de Educação à Distância (NEaD) como material complementar. Todavia, o professor regente da turma, com a anuência do aplicador da pesquisa, optou por não colocar disponível como entrega de atividade. A falta desse exercício, além de não os sobrecarregar, não impactou negativamente o aprendizado dos alunos, uma vez que os outros exercícios já exploram há habilidade da técnica de demonstração por indução. Porém, os alunos poderiam se utilizar de alguns conceitos apresentados nessa questão para resolver o exercício 3).

Exercício 3 **-** Prove que a soma dos termos de uma progressão geométrica é dada por:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

e que é válida para todo $n \in N$.

Resolução esperada:

Temos que

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n.$$

Reescrevendo a expressão acima em função da razão q. Temos

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \ldots + a_1 q^{n-1}.$$

Fatorando a expressão, tem-se

$$S_n = a_1 (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1})$$

Multiplicando ambos os lados da equação por $(1 - q)$, obtém-se

$$S_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$$

Multiplicando ambos os lados da equação por (-1), e rearranjando a expressão segue que:

$$S_n = \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1}$$

Agora, devemos provar se a fórmula da soma dos termos de uma PG é válida para todos os números naturais.

Para $n = 1$, tem-se que a fórmula é verdadeira, uma vez que

$$a_1 = \frac{a_1 \cdot q - a_1}{q - 1} = \frac{a_1 \cdot (q - 1)}{q - 1} = a_1$$

Suponha que a fórmula seja válida para algum $n \in N$. Basta verificarmos se a fórmula é válida para o sucessor de n.

$$\begin{aligned} S_n + a_{n+1} &= \frac{a_1 \cdot q^n - a_1}{q - 1} + a_{n+1} \\ &= \frac{a_{n+1} - a_1 + a_1\, q^n \cdot q - a_{n+1}}{q - 1} \\ &= \frac{a_1 \cdot q^{n+1} - a_1}{q - 1} \end{aligned}$$

Pelo PIF a fórmula é válida para todo $n \in N$.

As figuras 1, 2, 3 e 4 apresentam o desenvolvimento realizado pelos alunos, conforme as representações dos exercícios 1 e 3.

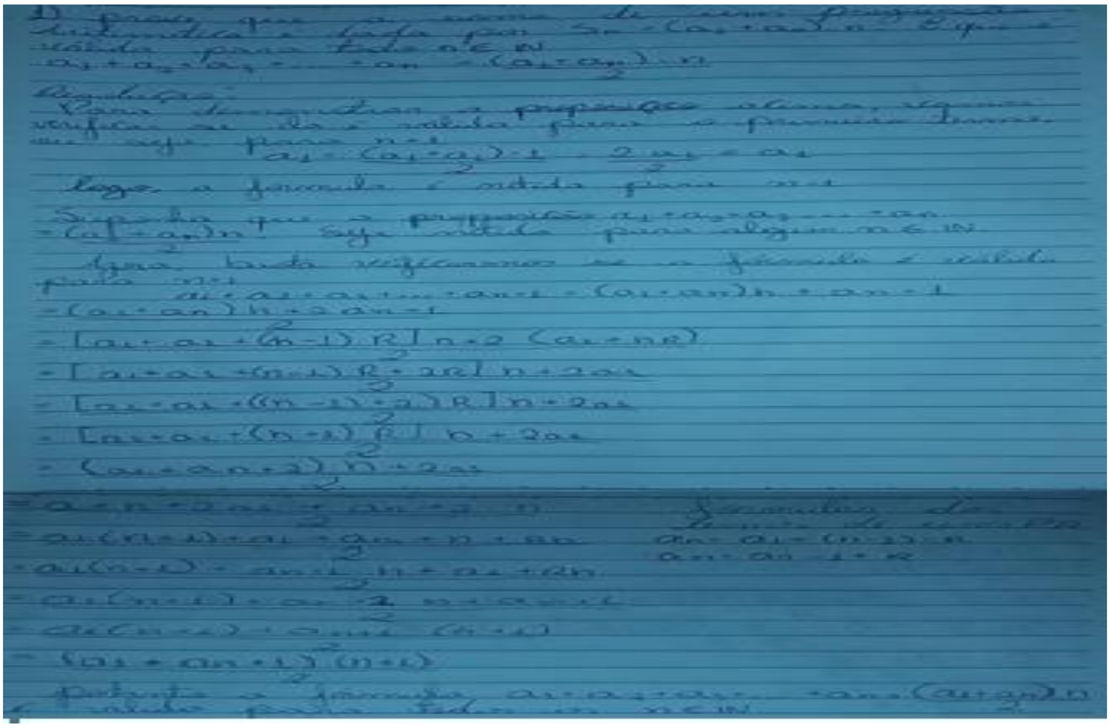


Figura 1: Resolução do Exercício 1 - Aluno A
Fonte: dados da pesquisa

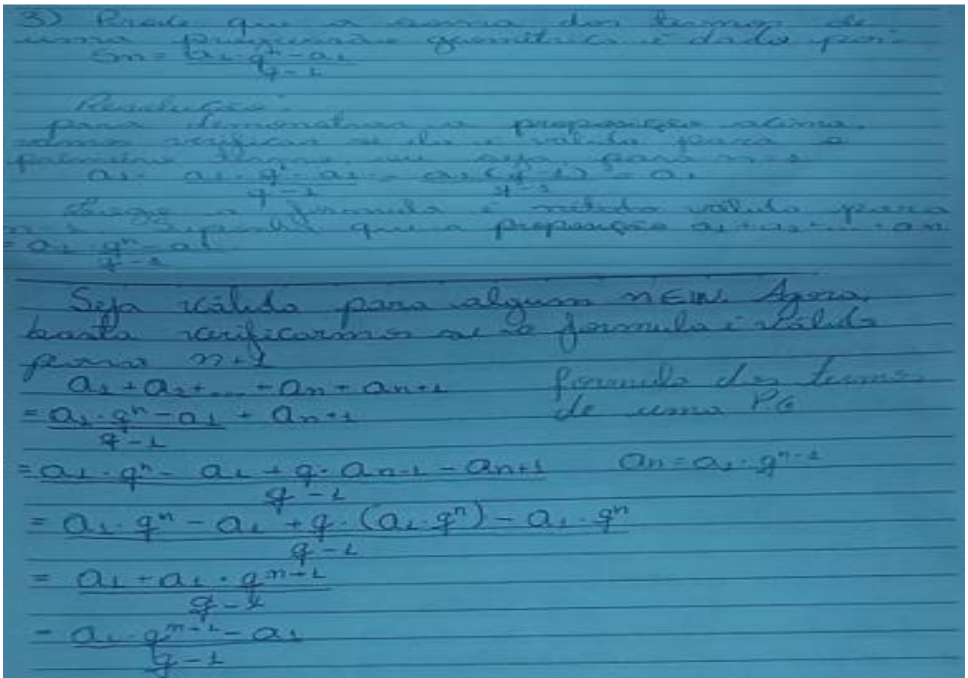
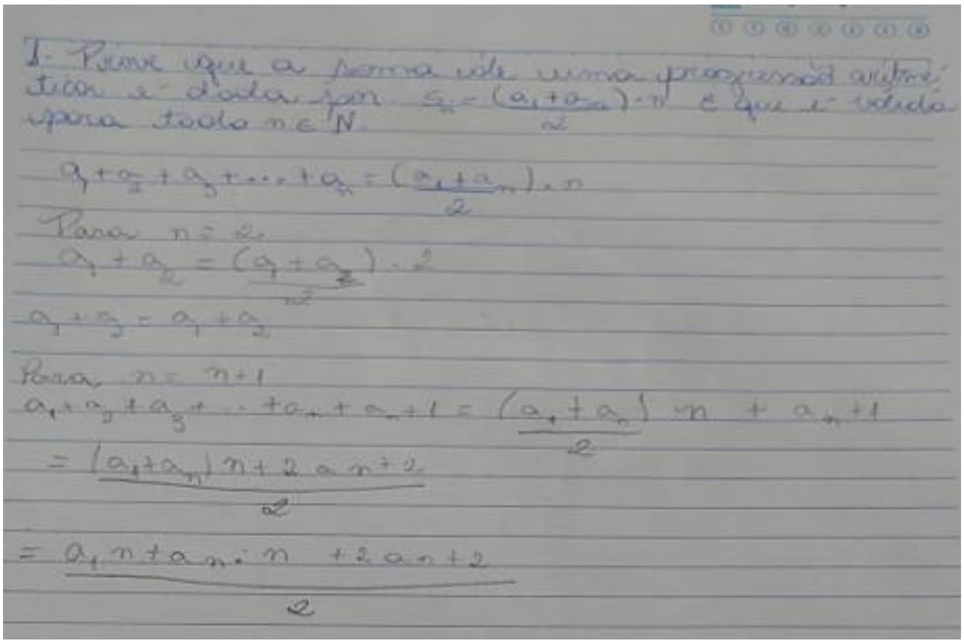


Figura 2: Resolução do Exercício 3 - Aluno A
Fonte: dados da pesquisa


1\. Prove que a soma de uma progressão aritmética é dada por $S_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$ e que é válida para todo $n \in N$.

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n = \frac{(a_1+a_n)}{2}\cdot n$

Para $n=2$

$a_1+a_2 = \frac{(a_1+a_2)}{2}\cdot 2$

$a_1+a_2 = a_1+a_2$

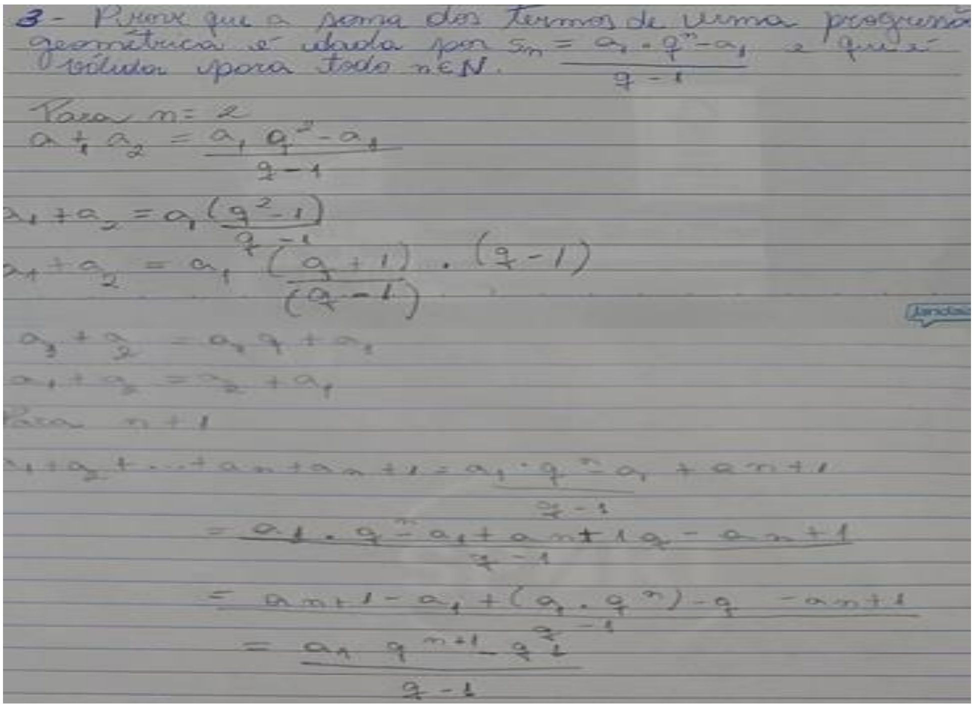
Para $n = n+1$

$a_1+a_2+a_3+\dots+a_n+a_n+1 = \frac{(a_1+a_n)}{2}\, n + a_n+1$

$= \frac{(a_1+a_n)\,n+2\,a\,n+2}{2}$

$= \frac{a_1 n + a_n \cdot n + 2an+2}{2}$

Figura 3: Resolução do Exercício 1 - Aluno B
Fonte: dados da pesquisa


3- Prove que a soma dos termos de uma progressão geométrica é dada por $S_n = \frac{a_1\cdot q^n - a_1}{q-1}$ e que é válida para todo $n \in N$.

Para $n=2$

$a_1+a_2 = \frac{a_1\, q^2 - a_1}{q-1}$

$a_1+a_2 = a_1\frac{(q^2-1)}{q-1}$

$a_1+a_2 = a_1\frac{(q+1)\cdot(q-1)}{(q-1)}$

$a_1+a_2 = a_1 q + a_1$

$a_1+a_2 = a_2+a_1$

Para $n+1$

$a_1+a_2+\dots+a\,n+a\,n+1 = \frac{a_1\cdot q^n - a_1}{q-1} + a\,n+1$

$= \frac{a_1\cdot q^n - a_1 + a\,n+1\,q - a\,n+1}{q-1}$

$= \frac{a\,n+1 - a_1 + (a_1\cdot q^n) - q - a\,n+1}{q-1}$

$= \frac{a_1\, q^{n+1} - q_1}{q-1}$

Figura 4: Resolução do Exercício 3 - Aluno B
Fonte: dados da pesquisa

Conforme a metodologia de Burak, daremos prosseguimento na explanação da quinta etapa que consiste na análise crítica da(s) solução(ões). Segue abaixo a resolução dos exercícios por parte dos alunos.

A quinta etapa da metodologia de investigação buscou analisar de maneira crítica as soluções propostas pelos alunos. Houve uma participação tímida por parte dos alunos na aula síncrona, porém eles conseguiram conjecturar algumas relações que existiam no jogo Torre de *Hanói*. Dessa forma, houve a prática da competência 5.

> Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BRASIL, 2018, p. 540).

Como foi disponibilizado apenas uma aula pelo professor regente para a ministração da aula, esse problema da Torre de *Hanói* como dito anteriormente foi resolvido em conjunto com a turma. Além do problema clássico da soma dos *n* primeiros números naturais resolvidos por Gauss quando era criança.

Em relação aos exercícios propostos, verificou-se que os exercícios vinham com a redação muito parecida das resoluções dos problemas apresentados a eles na aula síncrona. Outrora, não vinham com nenhum texto escrito em linguagem corrente. Os discentes não apresentaram dificuldades significativas na manipulação dos termos algébricos. Apenas na questão número 1 que teve casos que se chegou na resolução e em outros houve uma interrupção na questão. Na questão número 2 os discentes conseguiram apresentar as soluções esperadas.

Ao analisar a resolução dos estudantes percebe-se claramente que eles entenderam que o PIF tem um passo a passo a ser seguido como se fosse um algoritmo.

6. CONCLUSÃO

A pesquisa foi inicialmente pensada para ser feita de maneira presencial, porém decidiu-se aplicar no ensino remoto na modalidade síncrona e assíncrona devido à pandemia da *Covid-19*. Inicialmente, achou-se que não haveria diferenças significativas. Entretanto, o fato das aulas não serem presencial, há uma possibilidade de interferência nos resultados, devido à particularidade vivenciada por todos, durante pandemia. Os fatores podendo ser a dificuldade do acesso à *internet*, ou até mesmo o aluno não ter acesso à internet, o aluno não possuir um comutador ou celular, ou tablet que acessasse as aulas disponíveis à distância, entre outros, pois se identificou que os fatores foram múltiplos. No entanto, não se pode aprofundar nessas interferências, pois não fez parte do estudo.

Sobretudo, a pesquisa foi realizada no final do ano letivo os alunos estavam sobrecarregados com as atividades de matemática, como também, de outras disciplinas. No entanto, não havia o incentivo de nota na entrega dessa atividade muitos alunos não entregaram a atividade proposta.

Mesmo não fazendo parte da realidade dos discentes o uso de demonstrações formais, pode-se verificar uma participação dos alunos no jogo Torre de *Hanói* e também na aula, mesmo que de uma forma tímida. As demonstrações enviadas não tiveram erros matemáticos graves para o nível do ensino médio, exemplo disso foi o erro de formalidade que o estudante B cometeu ao não escrever a hipótese de indução como válida para um número n pertencente aos naturais e a partir dela verificar se é válida para o seu sucessor.

Esses resultados demonstram o que os teóricos já citados nesse artigo reafirmam em relação da importância de se trabalhar com a modelagem matemática.

Os estudos envolvendo o PIF na educação matemática pode-se utilizar a transdisciplinaridade em outras áreas, um exemplo atual é o uso de conhecimentos de programação para demonstrar informalmente e visualizar as relações matemáticas que possuem o jogo Torre de Hanói através do uso de algoritmos simples de programação. E verificar posteriormente o impacto na aprendizagem dos alunos.

7. REFERÊNCIAS

BARASUOL, Fabiana Fagundes. A matemática da pré-história ao antigo Egito. **UNIrevista.** São Leopoldo, v. 1, n. 2, 2006.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular. Ensino Médio**. Brasília: MEC. Versão entregue ao CNE em 03 de abril de 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/wpcontent/uploads/2018/04/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site.pdf. Acesso em: 04 dez. 2020.

BURAK, Dionísio. A Modelagem Matemática e a sala de aula. In: Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática - I EPMEM, 1, 2004, Londrina. **Anais... Londrina**: UEL, 2004. p. 1-10.

BURAK, Dionísio. Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. **Modelagem na Educação Matemática**, v. 1, n. 1, 2010, p. 10 - 27.

DUARTE, Edílson Abreu. **Princípio da Indução Finita em conteúdos do Ensino Médio**. 2015. 71 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Matemática, Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015. Cap. 6. Disponível em: https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/47714/1/2015_dis_eaduarte.pdf. Acesso em: 24 jan. 2022.

FORTES, Elenilson V.; SOUZA JUNIOR, Airton Wagner; OLIVEIRA, Ana M. L.
O uso de modelagem matemática no ensino de funções nas séries finais do

ISSN 1807-9342

Ensino Fundamental: um estudo de caso. Jataí: Itinerarius Reflectionis, v. 2, n. 15, 2013. Disponível em: https://www.revistas.ufg.br/rir/article/view/26414/19281. Acesso em: 20 set. 2020.

HEFEZ, A. **Indução matemática. Programa de Iniciação Científica da OBMEP**, 2009. Disponível em: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila4.pdf>. Acesso em: 04 out. 2020

LIMA, Elon Lages. **O Princípio da Indução**. Eureka, nº 3, 1998. Disponível em: <https://www.obm.org.br/content/uploads/2017/01/eureka3.pdf>. Acesso em: 5 out. 2020.

SANTOS, Anderson Carvalho. **O uso de demonstrações no ambiente escolar a partir do Princípio de indução finita**. 2013. Disponível em: <https://impa.br/wpcontent/uploads/2016/12/anderson_carvalho.pdf>. Acesso em: 2 out. 2020.

SILVA, Maria Deusa Ferreira; Mendes, Iran Abreu. a intencionalidade no fazer Matemática: um paralelo entre os “Discursos”da História e a Sociologia da Matemática. **revista brasileira de história da matemática**, [*s. l.*], ano 2013, v. 13, ed. 27, p. 33-53, primavera 2013. doi 10.47976/rbhm2013v13n2733-53. disponível em: http://rbhm.org.br/index.php/rbhm/article/view/94/78. acesso em: 27 jan. 2022.